

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1. а) $y = x^2 \cdot \cos^3 2x$; б) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \sin^2 x}}$;
 в) $y = (3^{\sin 2x} - \cos 3x)^2$; г) $y = e^{x^2} \cdot \cos^2 x$.
2. а) $y = x^3 \cdot e^{\operatorname{ctg} 3x}$; б) $y = (\sin^3 3x + \cos^3 2x)^2$;
 в) $y = \ln \operatorname{arctg} e^{-x}$; г) $y = \sin^3 3x \cdot \operatorname{tg}^2 2x$.
3. а) $y = x \cdot \operatorname{ctg}^2 4x$; б) $y = (x^3 + \operatorname{ctg}^3 2x)^2$;
 в) $y = \cos(x^4 - \operatorname{tg}^4 x)$; г) $y = \cos 2x \cdot e^{-2x}$.
4. а) $y = \ln \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}$; б) $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$;
 в) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$; г) $y = \frac{2^x \cdot (x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}$.

2- §. Юқори тартибли ҳосилалар

3.2.1. $y = f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли* ёки *иккинчи ҳосиласи* деб унинг биринчи тартибли ҳосиласидан олинган ҳосиллага, яъни $(y')'$ га айтилади.

Иккинчи тартибли ҳосила қуйидагиларнинг бири билан белгилади:

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$y = f(x)$ функциянинг *n-тартибли* ёки *n-ҳосиласи* деб унинг $(n-1)$ -тартибли ҳосиласидан олинган ҳосиллага айтилади. *n-тартибли ҳосила* учун ушбу белгилашлардан бири қўлланилади:

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Белгилашга кўра

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

1- м и с о л. $y = \ln x$ функциянинг *n- тартибли ҳосиласини* топинг.

Е ч и ш. *n* марта кетма-кет дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{2}{x^3}, y^{IV} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \dots,$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n} (n-1) !$$

3.2.2. x ўзгарувчининг y функцияси ошқормас шаклда $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган бўлса, y ҳолда y' ҳосилани топиш учун $F(x, y) = 0$ тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаб, сўнгра ҳосил бўлган y' га нисбатан чизикли тенгламадан ҳосилани топиш керак. Иккинчи ва ундан юқориқ тартибли ҳосилалар ҳам шу каби топилади.

2- м и с о л. Ошқормас ҳолда

$$x^2 + y^2 = 64$$

тенглама билан берилган y функциянинг y' ва y'' ҳосилаларини топинг.

Е ч и ш. y ўзгарувчи x нинг функцияси деб ҳисоблаб, берилган тенгламанинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз: $2x + 2y \cdot y' = 0$. Бундан $y' = -\frac{x}{y}$. Топилган биринчи y' ҳосилани яна x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y'' = (y')' = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Энди $y' = -\frac{x}{y}$ эканини ҳисобга олиб,

$$y'' = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$ ёки $y'' = -\frac{64}{y^3}$, чунки шартга кўра $x^2 + y^2 = 64$.

3.2.3. Агар y функциянинг x аргументга боғлиқлиги

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан параметрик шаклда берилган бўлса, y ҳолда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)' \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

3- м и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} x = 8\cos t, \\ y = 8\sin t \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

Е чи ш. Юкорида келтирилган формуладан фойдаланиб, куйидагиларни осон топамиз:

$$x'_t = -8 \sin t, \quad y'_t = 8 \cos t;$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{8 \cos t}{-8 \sin t} = -\operatorname{ctgt};$$

$$y''_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = (-\operatorname{ctgt})'_t \cdot \frac{1}{-8 \sin t} = -\frac{1}{8 \cdot \sin^3 t}.$$

3- дарсхона топириғи

1. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

2. $y = \frac{1+x}{1-x}$ функциянинг n - тартибли ҳосиласини топинг.

3. Куйидаги тенгламалар билан ошкормас ҳолда берилган функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг:

$$\text{а) } y^2 = 2px; \quad \text{б) } y = x + \operatorname{arctg} y.$$

4. Параметрик тенгламалар билан берилган функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:

$$\text{а) } \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

5. Ушбу

$$\begin{cases} x = \frac{5t}{1+t^2}, \\ y = \frac{5t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизикка $M_0(2, 4)$ нуктада ўтказилган уринма ва нормал тенгламасини топинг.

3- мустақил иш

1. а) $y = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$ тенглама билан ошқормас ҳолда берилган y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

2. а) $y = x^2 \sin(5x - 3)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ тенглама билан ошқормас ҳолда берилган y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

3. а) $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $x^4 - xy + y^4 = 1$ тенглама билан ошқормас ҳолда берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

3-§. Функциянинг дифференциали

3.3.1. $y = f(x)$ функциянинг дифференциали деб, унинг орттирмасининг эрки ўзгарувчи x нинг орттирмасига нисбатан чизикли бўлган бош қисмига айтилади.

$y = f(x)$ функциянинг дифференциали dy билан белгиланади. Функциянинг дифференциали унинг ҳосиласи билан эрки ўзгарувчи орттирмасининг кўпайтмасига тенг:

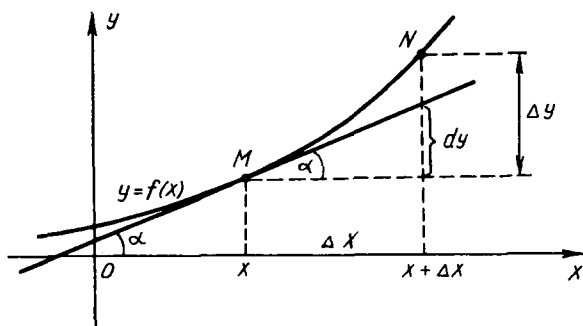
$$dy = f'(x) \Delta x \quad \text{ёки} \quad dy = y' \cdot \Delta x.$$

Равшанки, $dx = \Delta x$. Шу сабабли

$$dy = f'(x) dx \quad \text{ёки} \quad dy = y' dx.$$

Дифференциал геометрик жиҳатдан $y = f(x)$ функция графигига $M(x, y)$ нуктада ўтказилган уринма ординатасининг орттирмасига тенг (20-шакл).

Функциянинг дифференциали dy унинг Δy орттирмасидан Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик микдорга фарқ қилади.



20- шакл

3.3.2. Агар $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ функциялар дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда дифференциалнинг таърифи ва дифференциаллаш қоидаларидан бевосита дифференциалнинг асосий хоссаларига эга бўламиз:

1. $d(C)=0$, бунда C — ўзгармас.

2. $d(Cu)=Cdu$.

3. $d(u \pm v)=du \pm dv$.

4. $d(u \cdot v)=udv + vdu$.

5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$, бунда $v \neq 0$.

6. $df(u)=f'_u(u) \cdot u'dx=f'(u)du$.

1- м и с о л. $y=\text{tg}^4 2x$ функция дифференциалини топинг.

Е ч и ш. Олдин берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y'=8\text{tg}^3 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} = 8\text{tg}^3 2x \sec^2 2x.$$

У ҳолда $dy=8\text{tg}^3 2x \cdot \sec^2 2x dx$.

3.3.3. $y=f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб биринчи тартибли дифференциалдан олинган дифференциалга айтилади ва

$$d^2 y = d(dy)$$

каби белгиланади.

$y=f(x)$ функциянинг n - тартибли дифференциали деб $(n-1)$ -тартибли дифференциалдан олинган дифференциалга айтилади, яъни:

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

$y=f(x)$ функция берилган бўлиб, бунда x — эркин ўзгарувчи бўлса, у ҳолда унинг юқори тартибли дифференциаллари ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:

$$d^2 y = y'' dx^2, d^3 y = y''' dx^3, \dots, d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

2- м и с ол. $y = x(\ln x - 1)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Е ч и ш. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Демак, } dy = \ln x dx, \quad d^2 y = \frac{1}{x} dx^2.$$

3.3.4. Функциянинг dy дифференциали унинг Δy орттирмасидан $\Delta x = dx$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик микдорга фарк қилади, шу сабабли $\Delta y \approx dy$ ёки

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x,$$

бундан

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

формулага эга бўламиз, бу формула функция қийматларини тақрибий ҳисоблашларда қўлланади.

3- м и с ол. $\arcsin 0,51$ нинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

Е ч и ш. $y = \arcsin x$ функцияни қараймиз: $x = 0,5$, $\Delta x = 0,01$ деб олиб ва $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$ формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \arcsin 0,51 &\approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \\ &= \frac{\pi}{6} + 0,011 \approx 0,534. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\arcsin 0,51 \approx 0,534$ радиан.

4- дарсхона топириғи

1. $y = 2x^3 + 5x^2$ функция берилган. Унинг:

а) орттирмасини топинг;

б) орттирмасининг бош қисмини топинг.

Ж: а) $\Delta y = (6x^2 + 10x) \Delta x + (6x + 5) \Delta x^2 + 2\Delta x^3$;

б) $dy = (6x^2 + 10x) \Delta x$.

2. Қуйидаги функцияларнинг биринчи тартибли дифференциалларини топинг:

$$\text{а) } y = \sqrt{1+x^2}; \quad \text{б) } y = \arcsin \frac{1}{x}; \quad \text{в) } y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$